EN - EXERCICES SUR LES INTEGRALES MULTIPLES

Exercice 1 Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ dans les cas suivants

a)	D est le triangle de sommets O, $A(1,0)$, $B(0,1)$	$f(x,y) = \ln(x+y+1)$
b)	D est le parallélogramme limité par les droites d'équation $y = x$, $y = 2x$, $y = x+1$, $y = 2x-2$	$f(x,y) = (2x-y)^2$
c)	D est l'intersection du disque de centre O et de rayon 1 et du disque de centre $\Omega(1,1)$ et de rayon 1	$f(x,y) = xy$
d)	D est le trapèze dont la base est le segment de l'axe des x dont les abscisses sont comprises entre -1 et 1 et dont les trois autres côtés sont situés dans le demi-plan des $y \geq 0$ et de longueur 1.	$f(x,y) = y$
e)	D est limité par les courbes d'équation $y = 1/x$ et $y = -4x+5$	$f(x,y) = x^2y$
f)	D est l'ensemble des points du plan tels que $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \leq 1$	$f(x,y) = e^{x+y}$
g)	D est l'ensemble des points du disque de centre O et de rayon 1, tels que $x+y \geq 1$	$f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$
h)	D est le triangle de sommets O, $A(1,1)$, $B(2,-1)$	$f(x,y) = (x+2y)^2$
i)	D est le rectangle $[\,0,\,a\,] \times [\,0,\,b\,]$ $(a > b)$	$f(x,y) = \lvert x-y\rvert$
j)	D est l'ensemble des points du disque de centre O et de rayon 1, tels que $x + \sqrt{3}\,y \leq 1$	$f(x,y) = xy$
k)	D est l'ensemble des points du plan qui vérifient les inégalités $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1$ et $\sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} \geq 1$	$f(x,y) = (x-y)^2$
l)	D est l'intersection des disques limités par les cercles d'équation $x^2+y^2-2Rx = 0$ et $x^2+y^2-2Ry = 0$	$f(x,y) = x^2-y^2$

Exercice 2 Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ en utilisant les coordonnées polaires

a)	D est la couronne limitée par les cercles de centre O et de rayons respectifs a et b $(0 < a < b)$	$f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$
b)	D est le disque de centre O et de rayon a	$f(x,y) = (x+y)^2$
c)	D est limité par les axes et la droite d'équation $y = -2x+2$	$f(x,y) = 2x+y$
d)	D est limité par le cercle de centre O et de rayon 3 et le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1	$f(x,y) = x^2+y^2$
e)	D est l'ensemble des points du disque de centre O et de rayon 1, tels que $0 \leq y \leq x$	$f(x,y) = (x-y)^2$
f)	D est l'ensemble des points du carré $[\,0,\,1\,] \times [\,0,\,1\,]$ extérieurs au cercle de centre O et de rayon 1	$f(x,y) = \dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$

Exercice 3 Calculer $I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$ en utilisant le changement de variables indiqué

a) D est limité par les courbes d'équation $y = ax$, $y = x/a$, $y = b/x$, $y = 1/(bx)$ $(a > 1,\ b > 1,\ x > 0)$ | $f(x,y) = 1$
Changement de variables : $x = u/v$, $y = uv$

b) D est limité par l'ellipse d'équation $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ | $f(x,y) = x^2 + y^2$
Coordonnées elliptiques : $x = au\cos v$, $y = bu\sin v$

c) D est le domaine contenant O limité par le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{5}$ et la droite d'équation $y = -x - 3$. | $f(x,y) = x + y$
Changement de variables : $u = (x-y)/\sqrt{2}$, $v = (x+y)/\sqrt{2}$

Exercice 4 Calculer $I = \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$ dans les cas suivants

a) D est le domaine limité par les plans d'équation $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ | $f(x,y) = (x+y+z)^2$

b) D est l'ensemble des triplets (x,y,z) vérifiant les inégalités $0 \le y \le 1 - x^2$ et $|x + y + z| \le 1$ | $f(x,y) = x^2 y$

c) D est le domaine limité par les plans d'équation $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et la sphère de centre O et de rayon 1, dont les points ont des coordonnées positives | $f(x,y) = xyz$

Exercice 5 Calculer le volume $\mathscr{V} = \iiint_D dxdydz$ des ensembles D suivants de $\mathbb{R}^3$

a) Partie de la sphère de centre O et de rayon R, comprise entre les plans d'équation $z = h_1$ et $z = h_2$ $(R \ge h_1 > h_2 \ge -R)$.

b) Secteur sphérique, limité par la sphère de centre O et de rayon R et le demi-cône supérieur de sommet O et d'angle 2α.

c) Partie limitée par la sphère de centre O et de rayon 1 et le cylindre d'équation $x^2 + y^2 - y = 0$ (Fenêtre de Viviani).

d) Partie limitée par la sphère de centre O et de rayon 5 et le demi-cône supérieur de sommet $\Omega(0,0,1)$ et d'angle $2\alpha = \pi/2$.

e) Partie limitée par le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ et l'hyperboloïde d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$ $(a > o)$.

f) Partie limitée par la surface d'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = 1\,,$$

en utilisant le changement de variables

$$x = a\rho(\cos t\cos\varphi)^3\,,\ y = b\rho(\sin t\cos\varphi)^3\,,\ z = c\rho(\sin\varphi)^3\,,$$

où (ρ, t, φ) décrit $]\,0,\,1\,[\times]-\pi,\,\pi\,[\times]-\pi/2,\,\pi/2\,[$.

Exercice 6 Soit K un domaine du demi-plan $\{(x,z)\,|\,x \geq 0\}$. On note $\mathscr{A}$ son aire et x_G l'abscisse de son centre de gravité. Montrer que le volume du domaine D obtenu en faisant tourner K autour de l'axe Oz est donné par la formule

$$\mathscr{V} = 2\pi x_G \mathscr{A}\,.$$

(Deuxième théorème de Guldin).

Application : trouver le volume du tore engendré en faisant tourner autour de Oz, le disque limité par le cercle d'équation $(x-a)^2 + y^2 = R^2$ $(0 < R \leq a)$.

Exercice 7 Soit les quatre points du plan $A(-1,1)$, $B(1,1)$, $C(1,3)$ et $O(0,0)$.

Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = x^2(y-1)\,.$$

a) Soit D le domaine limité par les droites AC et BC et le demi-cercle de diamètre AB contenant O. Calculer

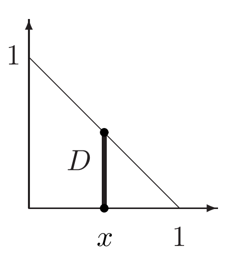
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy\,.$$

b) Soit D' l'ensemble des points du disque de centre O et de rayon $\sqrt{10}$ qui n'appartiennent pas à D. Calculer

$$\iint\limits_{D'} f(x,y)\,dxdy\,.$$

Corrigé des exercices sur les intégrales multiples

1) a)



Lorsque x est compris entre 0 et 1, le nombre y varie de 0 à $1-x$. Donc

$$I_y(x) = \int_0^{1-x} \ln(x+y+1)\, dy\,.$$

En posant $u = x+y+1$, on obtient

$$I_y(x) = \int_{x+1}^{2} \ln u\, du = \Big[u \ln u - u\Big]_{x+1}^{2} = 2\ln 2 - 2 - (x+1)\ln(x+1) + (x+1)\,.$$

On a alors

$$I = \int_0^1 I_y(x)\, dx = \int_0^1 [2\ln 2 - 2 - (x+1)\ln(x+1) + (x+1)]\, dx\,.$$

En posant $v = x+1$, on obtient

$$I = 2\ln 2 - 2 - \int_1^2 (u\ln u - u)\, du\,,$$

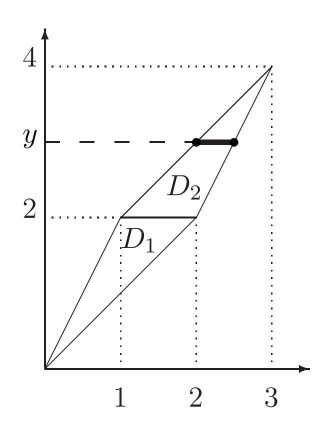
et, en intégrant par parties,

$$\int_1^2 (u\ln u - u)\, du = \left[\frac{u^2}{2}\ln u\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{3}{2} u\, du\,,$$

d'où

$$I = 2\ln 2 - 2 - \left[\frac{u^2}{2}\ln u - \frac{3}{4}u^2\right]_1^2 = \frac{1}{4}\,.$$

b)



On découpe le domaine en deux parties D_1 et D_2, séparées par la droite d'équation $y = 2$, et on intègre sur chacun de ces domaines en fixant tout d'abord y.
Sur D_1, lorsque y est fixé entre 0 et 2, le nombre x varie de $y/2$ à y. On calcule tout d'abord

$$(I_x)_1(y) = \int_{y/2}^{y} (2x-y)^2\,dx = \left[\frac{(2x-y)^3}{6}\right]_{y/2}^{y} = \frac{y^3}{6}\,,$$

alors

$$\iint_{D_1} (2x-y)^2\,dxdy = \int_0^2 \frac{y^3}{6}\,dy = \left[\frac{y^4}{24}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\,.$$

Sur D_2, lorsque y est fixé entre 2 et 4, le nombre x varie de $y-1$ à $y/2+1$. On calcule tout d'abord

$$(I_x)_2(y) = \int_{y-1}^{y/2+1} (2x-y)^2\,dx = \left[\frac{(2x-y)^3}{6}\right]_{y-1}^{y/2+1} = \frac{8-(y-2)^3}{6}\,,$$

alors

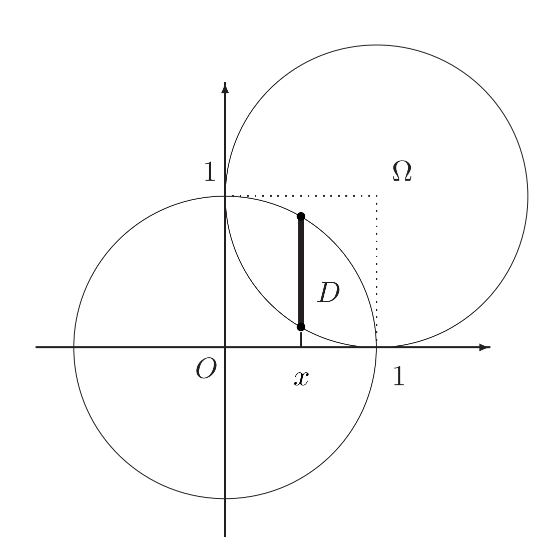
$$\iint_{D_2} (2x-y)^2\,dxdy = \int_2^4 \frac{8-(y-2)^3}{6}\,dy = \left[\frac{1}{6}\left(8y - \frac{(y-2)^4}{4}\right)\right]_2^4 = 2\,.$$

Finalement

$$I = \iint_{D_1} (2x-y)^2\,dxdy + \iint_{D_2} (2x-y)^2\,dxdy = \frac{8}{3}\,.$$

EN 6

c)



Le cercle de centre $\Omega(1,1)$ et de rayon 1, a pour équation

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1\,.$$

L'équation de la partie inférieure du cercle sera donc

$$y=1-\sqrt{1-(x-1)^2}\,.$$

L'équation de la partie supérieure du cercle de centre O et de rayon 1 sera

$$y=\sqrt{1-x^2}\,.$$

Pour x compris entre 0 et 1, on calcule

$$\begin{aligned}
I_y(x) &= \int\limits_{1-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy \\
&= \left[x\frac{y^2}{2}\right]_{1-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{x}{2}\left[(1-x^2)-\left(1-\sqrt{1-(x-1)^2}\right)^2\right] \\
&= \frac{x}{2}\left[(1-x^2)-(1-2\sqrt{1-(x-1)^2}+1-(x-1)^2)\right] \\
&= \frac{x}{2}\left[(1-x^2)-(2-2\sqrt{1-(x-1)^2}-(x^2-2x+1))\right] \\
&= x\sqrt{1-(x-1)^2}-x^2\,.
\end{aligned}$$

On a alors

$$I=\int\limits_0^1(x\sqrt{1-(x-1)^2}-x^2)\,dx=\int\limits_0^1 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx-\frac{1}{3}\,.$$

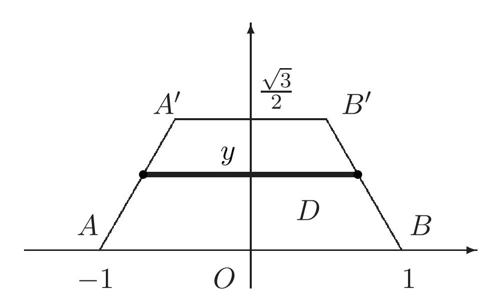
On calcule l'intégrale de droite en posant par exemple $x = 1 - \sin t$, pour t dans $[0, \pi/2]$. On a alors $dx = -\cos t\, dt$, et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sqrt{1-(x-1)^2}\, dx &= \int_0^{\pi/2} (1-\sin t)\cos^2 t\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt - \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^2 t\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt - \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^2 t\, dt \\
&= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Donc

$$I = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}.$$

d)



Si l'on note $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ et A' et B' les autres sommets du trapèze, on a $AA' = A'B' = BB' = 1$. Les triangles OBB', $OB'A'$ et OAA' sont équilatéraux. Alors la droite passant par A' et B' a pour équation

$$y = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

la droite passant par B et B' a pour équation

$$y = -\tan\frac{\pi}{3}(x-1) = -\sqrt{3}(x-1),$$

et celle passant par A et A' a pour équation

$$y = \sqrt{3}(x+1).$$

EN 8

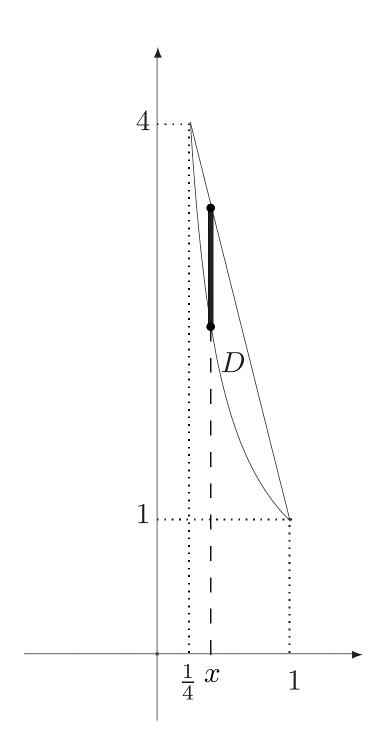
Lorsque y est fixé entre 0 et $\sqrt{3}/2$, la variable x est comprise entre $-1+y/\sqrt{3}$ et $1-y/\sqrt{3}$, et l'on a

$$I_x(y) = \int_{-1+y/\sqrt{3}}^{1-y/\sqrt{3}} y\,dx = 2y\left(1-\frac{y}{\sqrt{3}}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\sqrt{3}/2} 2y\left(1-\frac{y}{\sqrt{3}}\right) dy \\ &= \left[y^2 - \frac{2}{3\sqrt{3}}y^3\right]_0^{\sqrt{3}/2} \\ &= \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

e)



Cherchons les points d'intersection des deux courbes. On doit avoir

$$\frac{1}{x} = -4x+5\,,$$

ce qui équivaut à

$$4x^2 - 5x + 1 = 0\,,$$

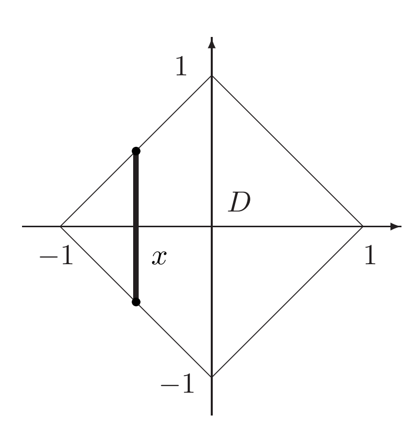
et a pour solutions 1 et 1/4 . Lorsque x est fixé entre ces deux valeurs, on intègre en y

$$\begin{aligned} I_y(x) &= \int_{1/x}^{-4x+5} x^2 y\, dy \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{1/x}^{-4x+5} \\ &= \frac{1}{2}(x^2(-4x+5)^2-1) \\ &= \frac{1}{2}\left(16x^4-40x^3+25x^2-1\right) . \end{aligned}$$

Alors

$$I = \int_{1/4}^{1} I_y(x)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{16}{5}x^5 - 10x^4 + \frac{25}{3}x^3 - x\right]_{1/4}^{1} = \frac{441}{1280} .$$

f)



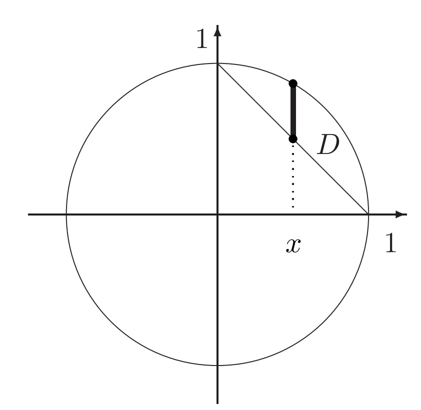
Lorsque x est fixé entre -1 et 1, y varie de $|x|-1$ à $1-|x|$. On a donc

$$I_y = \int_{|x|-1}^{1-|x|} e^{x+y}\, dy = \left[e^{x+y}\right]_{|x|-1}^{1-|x|} = e^x\left(e^{1-|x|} - e^{|x|-1}\right) .$$

On a alors

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} e^x \left(e^{1-|x|} - e^{|x|-1}\right) dx \\
&= \int_{-1}^{0} e^x \left(e^{1+x} - e^{-x-1}\right) dx + \int_{0}^{1} e^x \left(e^{1-x} - e^{x-1}\right) dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left(e^{1+2x} - e^{-1}\right) dx + \int_{0}^{1} \left(e - e^{2x-1}\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{2}e^{2x+1} - xe^{-1}\right]_{-1}^{0} + \left[ex - \frac{1}{2}e^{2x-1}\right]_{0}^{1} \\
&= \frac{e}{2} - \left(\frac{1}{2e} + \frac{1}{e}\right) + \left[\left(e - \frac{e}{2}\right) + \frac{1}{2e}\right] \\
&= e - \frac{1}{e} = 2\,\mathrm{sh}\,1\,.
\end{aligned}$$

g)



La partie supérieure du cercle a pour équation $y = \sqrt{1-x^2}$. Pour x compris entre 0 et 1, on calcule

$$\begin{aligned}
I_y(x) &= \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, dy \\
&= \left[\frac{-x}{2(x^2+y^2)}\right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{x}{2(2x^2-2x+1)} - \frac{x}{2}\,.
\end{aligned}$$

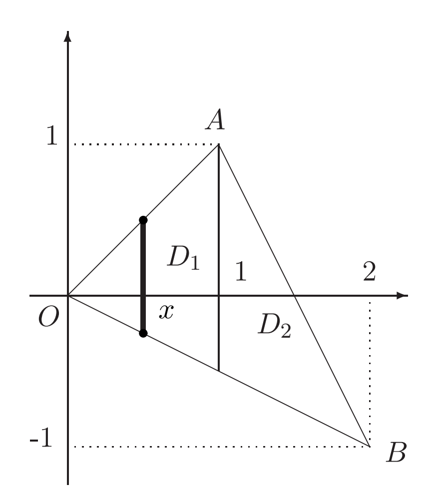
On a alors

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x}{2(2x^2 - 2x + 1)} - \frac{x}{2} \right) dx\,.$$

En faisant apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\frac{1}{8}\,\frac{4x-2}{2x^2-2x+1} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{2x^2-2x+1} - \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{8}\ln(2x^2-2x+1) + \frac{1}{4}\arctan(2x-1) - \frac{x^2}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}\left(\arctan 1 - \arctan(-1)\right) - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

h)



Les droites OA, OB et AB ont pour équations respectives $y = x$, $y = -x/2$ et $y = -2x+3$. On sépare D en deux domaines limités par la droite d'équation $x = 1$. On a alors, si x est compris entre 0 et 1,

$$\begin{aligned} (I_y)_1(x) &= \int_{-x/2}^{x} (x+2y)^2\,dy \\ &= \left[\frac{1}{6}(x+2y)^3 \right]_{-x/2}^{x} \\ &= \frac{9x^3}{2}\,, \end{aligned}$$

d'où

$$\iint_{D_1} (x+2y)^2\,dxdy = \int_0^1 \frac{9x^3}{2}\,dx = \frac{9}{8}\,.$$

Si x est compris entre 1 et 2,

$$
\begin{aligned}
(I_y)_2(x) &= \int\limits_{-x/2}^{-2x+3} (x+2y)^2\,dy \\
&= \left[\frac{1}{6}(x+2y)^3\right]_{-x/2}^{-2x+3} \\
&= \frac{9(2-x)^3}{2}\,.
\end{aligned}
$$

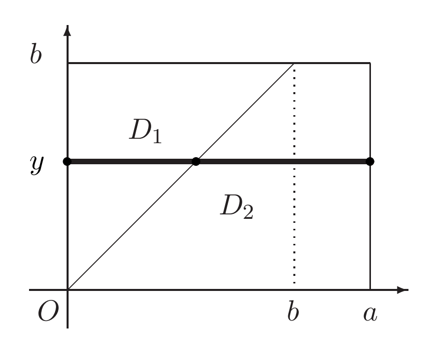
D'où

$$\iint\limits_{D_2} (x+2y)^2\,dxdy = \int_1^2 \frac{9(2-x)^3}{2}\,dx = \left[\frac{-9(2-x)^4}{8}\right]_1^2 = \frac{9}{8}\,.$$

Alors

$$I = \iint\limits_{D_1} (x+2y)^2\,dxdy + \iint\limits_{D_2} (x+2y)^2\,dxdy = \frac{9}{4}\,.$$

i)



On sépare D en deux domaines limités par la droite d'équation $y = x$, et on intègre d'abord en x. Sur D_1, on a $f(x,y) = y - x$, et lorsque y est compris entre 0 et b, on obtient

$$(I_x)_1(y) = \int\limits_0^y (y-x)\,dx = \left[\frac{-(y-x)^2}{2}\right]_0^y = \frac{y^2}{2}\,.$$

Puis

$$\iint\limits_{D_1} |x-y|\,dxdy = \int_0^b (I_x)_1(y)\,dy = \frac{b^3}{6}\,.$$

Sur D_2, on a $f(x,y) = x - y$, et, lorsque y est compris entre 0 et b, on obtient

$$(I_x)_2(y) = \int\limits_y^a (x-y)\,dx = \left[\frac{(x-y)^2}{2}\right]_y^a = \frac{(y-a)^2}{2}\,.$$

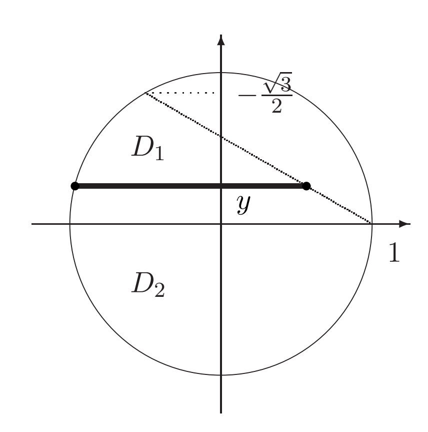
Puis

$$\iint_{D_2} |x-y|\,dxdy = \int_0^b (I_x)_2(y)\,dy = \left[\frac{(y-a)^3}{6}\right]_0^b = \frac{(b-a)^3}{6} + \frac{a^3}{6}\,.$$

Alors

$$I = \iint_{D_1} |x-y|\,dxdy + \iint_{D_2} |x-y|\,dxdy = \frac{(b-a)^3}{6} + \frac{a^3}{6} + \frac{b^3}{6} = \frac{b^3}{3} + \frac{1}{2}ab(a-b)\,.$$

j)



On sépare D en deux domaines limités par l'axe des x. Sur la partie inférieure qui est symétrique par rapport à Oy, on a

$$f(-x,y) = -f(x,y)\,,$$

donc

$$\iint_{D_2} xy\,dxdy = 0\,,$$

et

$$I = \iint_{D_1} xy\,dxdy\,.$$

Cherchons les points d'intersection de la droite et du cercle. Le système

$$\left\{\begin{array}{c} x+\sqrt{3}\,y = 1 \\ x^2+y^2 = 1 \end{array}\right.$$

équivaut à

$$\left\{\begin{array}{c} x+\sqrt{3}\,y = 1 \\ (1-\sqrt{3}\,y)^2+y^2 = 1 \end{array}\right.$$

La seconde équation s'écrit

$$4y^2 - 2\sqrt{3}\,y = 0\,,$$

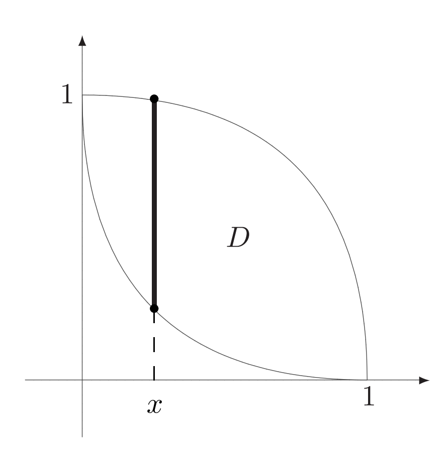
et a pour solutions $y = 0$ et $y = \sqrt{3}/2$. La droite d'équation $x + \sqrt{3}\,y = 1$, coupe le cercle aux points de coordonnées $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ et $(1, 0)$ L'équation de la partie gauche du cercle est $x = -\sqrt{1-y^2}$. Lorsque y est compris entre 0 et $\sqrt{3}/2$, on a donc

$$\begin{aligned} I_x(y) &= \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-\sqrt{3}\,y} xy\,dx \\ &= \left[\frac{x^2y}{2}\right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-\sqrt{3}\,y} \\ &= \frac{y}{2}((1-\sqrt{3}\,y)^2 - (1-y^2)) \\ &= 2y^3 - \sqrt{3}\,y^2\,. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{\sqrt{3}/2} (2y^3 - \sqrt{3}\,y^2)\,dy \\ &= \left[\frac{1}{2}y^4 - \frac{\sqrt{3}}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{3}/2} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{9}{16} - \frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{3\sqrt{3}}{8} = -\frac{3}{32}\,. \end{aligned}$$

k)



Si (x, y) appartient à D, on a nécessairement $0 \le x \le 1$, et $0 \le y \le 1$. Alors La condition

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \ge 1\,,$$

équivaut à

$$\sqrt{y} \ge 1 - \sqrt{x}\,,$$

puis à

$$y \geq (1-\sqrt{x})^2 = 1 + x - 2\sqrt{x}\,.$$

De même, la condition

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} \geq 1\,,$$

équivaut à

$$\sqrt{1-y} \geq 1 - \sqrt{1-x}\,,$$

puis à

$$1 - y \geq (1-\sqrt{1-x})^2\,,$$

et enfin à

$$y \leq 1 - (1-\sqrt{1-x})^2 = x - 1 + 2\sqrt{1-x}\,.$$

Pour x compris entre 0 et 1, on calcule

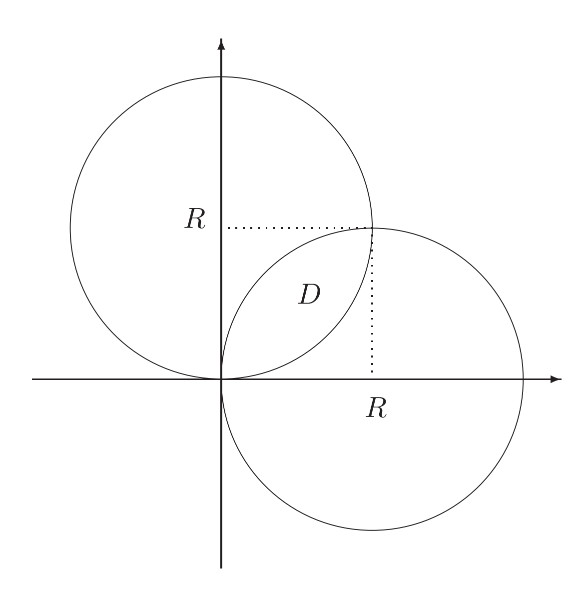
$$\begin{aligned}
I_y(x) &= \int\limits_{1+x-2\sqrt{x}}^{x-1+2\sqrt{1-x}} (y-x)^2\,dy \\
&= \left[\frac{(y-x)^3}{3}\right]_{1+x-2\sqrt{x}}^{x-1+2\sqrt{1-x}} \\
&= \frac{1}{3}\left[(2\sqrt{1-x}-1)^3 - (1-2\sqrt{x})^3\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[8(x^{3/2} + (1-x)^{3/2}) + 6(\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) - 14\right]\,.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^1 \frac{1}{3}\left[8(x^{3/2} + (1-x)^{3/2}) + 6(\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) - 14\right]\,dx \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{16}{5}(x^{5/2} - (1-x)^{5/2}) + 4(x^{3/2} - (1-x)^{3/2}) - 14x\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{16}{5} + 4 - 14 + \frac{16}{5} + 4\right] \\
&= \frac{2}{15}\,.
\end{aligned}$$

EN 16

1)

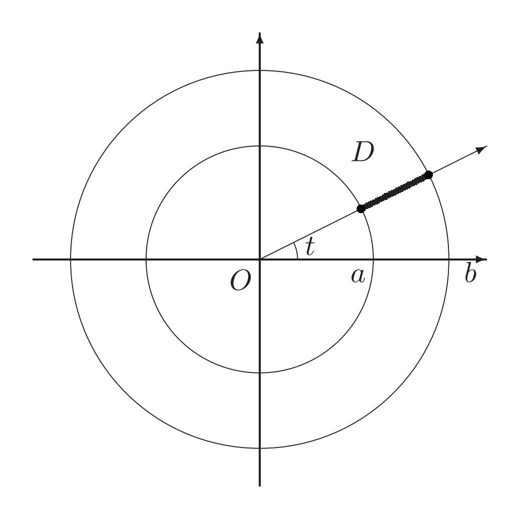


Le domaine D est symétrique par rapport à la première bissectrice. Sur D, on a

$$f(y, x) = -f(x, y)\,.$$

Alors nécessairement $I = 0$.

2) a)



Le domaine D est obtenu lorsque les coordonnées polaires (r, t) parcourent le rectangle

$$\Delta = [\,a,\, b\,] \times [\,-\pi,\, \pi\,]\,.$$

D'autre part

$$f(r\cos t, r\sin t) = \frac{1}{r^2}\,.$$

Donc

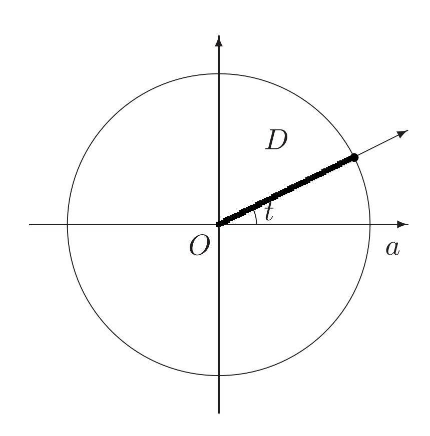
$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Delta} f(r\cos t, r\sin t)\, r dr dt \\ &= \iint_{\Delta} \frac{dr dt}{r} \\ &= \left(\int_a^b \frac{dr}{r}\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} dt\right) \\ &= 2\pi \ln \frac{b}{a}\,. \end{aligned}$$

b) Le domaine D est obtenu lorsque les coordonnées polaires (r, t) parcourent le rectangle

$$\Delta = [\,0,\, a\,] \times [\,-\pi,\, \pi\,]\,.$$

D'autre part

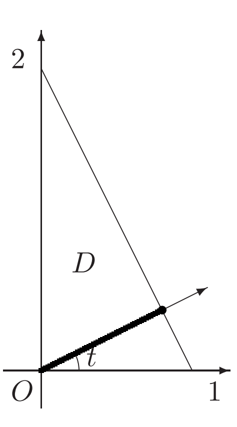
$$f(r\cos t, r\sin t) = (r\cos t + r\sin t)^2 = r^2(1 + \sin 2t)\,.$$



Donc

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Delta} f(r\cos t, r\sin t)\, r dr dt \\ &= \iint_{\Delta} r^3(1 + \sin 2t)\, dr dt \\ &= \left(\int_0^a r^3\, dr\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \sin 2t) dt\right) \\ &= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a \left[1 - \frac{\cos 2t}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \pi \frac{a^4}{2}\,. \end{aligned}$$

c)



Cherchons tout d'abord l'équation polaire de la droite d'équation cartésienne $y = -2x + 2$. On a

$$r \sin t = -2r \cos t + 2\,,$$

d'où

$$r = \frac{2}{\sin t + 2\cos t}\,.$$

Lorsque t est compris entre 0 et $\pi/2$, le nombre r varie de 0 à $\dfrac{2}{\sin t + 2\cos t}$. On intègre donc sur le domaine

$$\Delta = \left\{(r,t)\,|\, 0 \leq r \leq \frac{2}{\sin t + 2\cos t}\,,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right\}\,.$$

D'autre part

$$f(r\cos t, r\sin t) = r(2\cos t + \sin t)\,.$$

Donc

$$I = \iint_{\Delta} f(r\cos t, r\sin t)\, r dr dt = \iint_{\Delta} r^2(2\cos t + \sin t)\, dr dt\,.$$

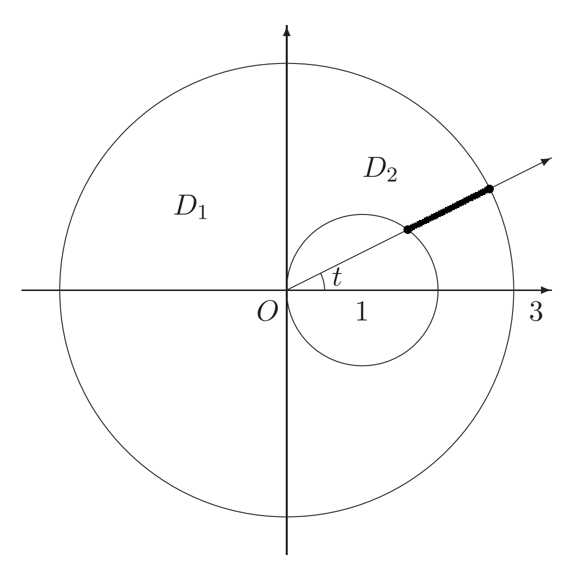
On a tout d'abord

$$\begin{aligned}
I_r(t) &= \int_0^{\frac{2}{\sin t + 2\cos t}} r^2(2\cos t + \sin t)\, dr \\
&= \left[\frac{r^3}{3}(2\cos t + \sin t)\right]_0^{\frac{2}{\sin t + 2\cos t}} \\
&= \frac{8}{3(\sin t + 2\cos t)^2} \\
&= \frac{8}{3}\,\frac{1}{\cos^2 t(\tan t + 2)^2}\,.
\end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2} \frac{8}{3} \frac{dt}{\cos^2 t(\tan t + 2)^2} \\
&= \left[\frac{8}{3} \frac{-1}{\tan t + 2}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{8}{3}\left[\lim_{t\to\pi/2} \frac{-1}{\tan t + 2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{4}{3}\,.
\end{aligned}
$$

d)



On décompose le domaine en deux parties limitées par l'axe Oy. On a

$$f(r\cos t, r\sin t) = r^2\,.$$

La partie D_1 est obtenue lorsque (r, t) parcourt le domaine

$$\Delta_1 = [\,0,\, 3\,] \times [\,\pi/2,\, 3\pi/2\,]\,,$$

donc

$$
\begin{aligned}
\iint_{D_1} f(x, y)\, dxdy &= \iint_{\Delta_1} f(r\cos t, r\sin t)\, rdrdt \\
&= \iint_{\Delta_1} r^3\, drdt \\
&= \left(\int_0^3 r^3\, dr\right)\left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} dt\right) \\
&= \frac{81}{4}\,\pi\,.
\end{aligned}
$$

EN 20

Le petit cercle a comme équation cartésienne

$$(x-1)^2+y^2=1\,,$$

ou encore

$$x^2+y^2=2x\,.$$

Donc, en coordonnées polaires,

$$r^2=2r\cos t\,,$$

soit

$$r=2\cos t\,.$$

La partie D_2 est obtenue lorsque (r,t) parcourt le domaine

$$\Delta_2=\left\{(r,t)\,|\,2\cos t\leq r\leq 3\,,\ -\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}\right\}\,.$$

Lorsque t est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, on a

$$I_r(t)=\int\limits_{2\cos t}^{3} r^3\,dr=\frac{81-16\cos^4 t}{4}\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy &= \iint\limits_{\Delta_2} r^3\,drdt\\ &= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{81-16\cos^4 t}{4}\,dt\,.\end{aligned}$$

Mais, en linéarisant,

$$\begin{aligned}\cos^4 t &= \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2\\ &= \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)\\ &= \frac{1}{8}(3+4\cos 2t+\cos 4t)\,.\end{aligned}$$

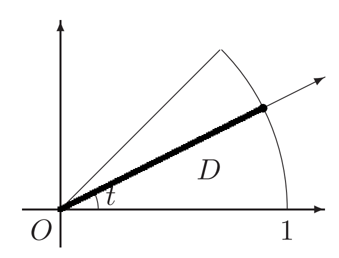
Alors

$$\begin{aligned}\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4}\left(81-2(3+4\cos 2t+\cos 4t)\right)\,dt\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4}(75-8\cos 2t-2\cos 4t)\,dt\\ &= \left[\frac{1}{4}\left(75t-4\sin 2t-\frac{\sin 4t}{2}\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\\ &= \frac{75\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

Finalement

$$I=\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy+\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy=\frac{81\pi}{4}+\frac{75\pi}{4}=39\pi\,.$$

e)



On a

$$f(r\cos t, r\sin t)=r^2(\cos t-\sin t)^2=r^2(1-\sin 2t)\,.$$

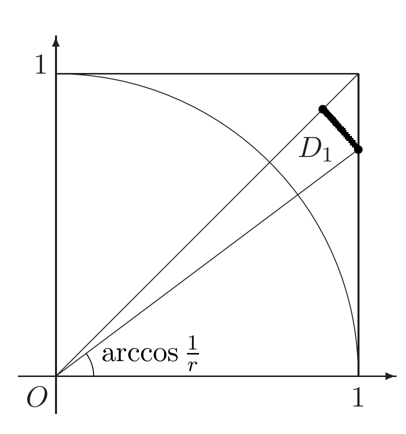
Le domaine D est parcouru par le point de coordonnées (x,y) lorsque (r,t) décrit le domaine

$$\Delta=[\,0,\,1\,]\times[\,0,\,\pi/4\,]\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}\iint_{D} f(x,y)\,dxdy &= \iint_{\Delta} r^3(1-\sin 2t)\,drdt\\ &= \left(\int_0^1 r^3\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/4}(1-\sin 2t)\,dt\right)\\ &= \frac{1}{4}\left[t+\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\pi/4}\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\pi-2}{16}\,.\end{aligned}$$

f)



Le domaine est symétrique par rapport à la première bissectrice, et, quel que soit (x, y) dans D,

$$f(y,x) = f(x,y)\,.$$

Donc

$$I = 2 \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy\,,$$

où D_1 est la partie du domaine située sous la première bissectrice. On a

$$f(r\cos t, r\sin t) = \frac{r^2 \cos t \sin t}{1+r^2} = \frac{r^2 \sin 2t}{2(1+r^2)}\,.$$

La droite d'équation cartésienne $x = 1$, a pour équation polaire, $r = 1/\cos t$. En exprimant t en fonction de r, on a encore $t = \arccos(1/r)$. Le domaine D_1 est parcouru lorsque (r, t) décrit le domaine

$$\Delta_1 = \left\{ (r,t) \mid \arccos \frac{1}{r} \leq t \leq \frac{\pi}{4}\,,\ 1 \leq r \leq \sqrt{2} \right\}\,.$$

Donc

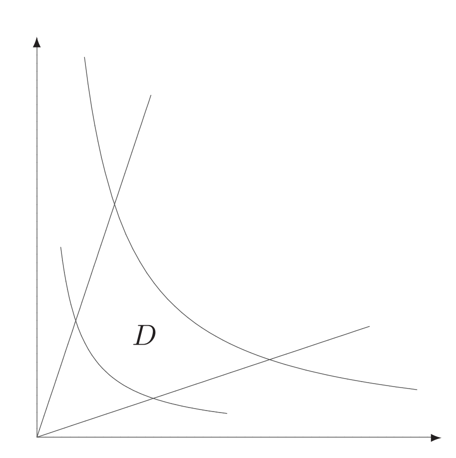
$$I = 2 \iint_{\Delta_1} f(r\cos t, r\sin t)\, rdrdt\,.$$

On commence à intégrer en t. Pour r compris entre 1 et $\sqrt{2}$, on a

$$\begin{aligned} I_t(r) &= \int_{\arccos(1/r)}^{\pi/4} \frac{r^3 \sin 2t}{2(1+r^2)}\,dt \\ &= \frac{r^3}{2(1+r^2)} \left[-\frac{\cos 2t}{2} \right]_{\arccos(1/r)}^{\pi/4} \\ &= \frac{r^3}{4(1+r^2)} \cos\left(2 \arccos \frac{1}{r}\right)\,. \end{aligned}$$

Mais
$$\cos\left(2\arccos\frac{1}{r}\right) = 2\cos^2\left(\arccos\frac{1}{r}\right) - 1 = \frac{2}{r^2} - 1\,.$$
D'où
$$I_t(r) = \frac{r^3}{4(1+r^2)}\left(\frac{2}{r^2} - 1\right) = \frac{r}{4}\,\frac{2-r^2}{r^2+1}\,.$$
Alors
$$I = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{2-r^2}{r^2+1}\,\frac{r\,dr}{4}\,,$$
et en effectuant le changement de variable $u = r^2$,
$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{2-u}{u+1}\,\frac{du}{4} \\ &= \frac{1}{4}\int_1^2 \left(\frac{3}{u+1} - 1\right)\,du \\ &= \frac{1}{4}\Big[3\ln(u+1) - u\Big]_1^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(3\ln\frac{3}{2} - 1\right)\,. \end{aligned}$$

3) a)



On remarque que, si les nombres u,v, x, y, sont positifs, le système
$$\begin{cases} x = \dfrac{u}{v} \\ y = uv \end{cases}$$

équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l} u = \sqrt{xy} \\ v = \sqrt{\dfrac{y}{x}} \end{array}\right. .$$

L'application

$$\Phi : (u, v) \mapsto (x, y)\,,$$

est une bijection de $]\,0,\,+\infty\,[\times]\,0,\,+\infty\,[$ sur lui même.

Par ailleurs, D est l'ensemble des couples (x, y) tels que

$$\frac{x}{a} \leq y \leq ax \quad \text{et} \quad \frac{1}{bx} \leq y \leq \frac{b}{x}\;,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{a} \leq \frac{y}{x} \leq a \quad \text{et} \quad \frac{1}{b} \leq xy \leq b\,,$$

ou encore

$$\frac{1}{a} \leq v^2 \leq a \quad \text{et} \quad \frac{1}{b} \leq u^2 \leq b\,,$$

On constate que (x, y) appartient à D, si et seulement si (u^2, v^2) appartient à $[\,1/b,\,b\,]\times[\,1/a,\,a\,]$, c'est-à-dire si et seulement si (u, v) appartient à $\Delta = [\,1/\sqrt{b},\,\sqrt{b}\,]\times[\,1/\sqrt{a},\,\sqrt{a}\,]$. Cet ensemble est donc un rectangle.

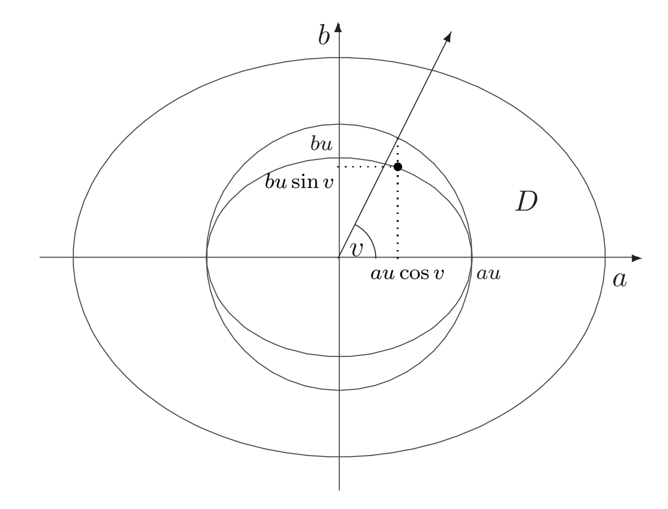
Calculons le jacobien du changement de variables. On a

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2} \\ v & u \end{vmatrix} = 2\,\frac{u}{v}\,.$$

Donc, puisque f est constante,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Delta} 2\,\frac{u}{v}\,dudv \\ &= 2\left(\int_{1/\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} u\,du\right)\left(\int_{1/\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{v}\,dv\right) \\ &= \left(b - \frac{1}{b}\right)\left(\ln\sqrt{a} - \ln\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \\ &= \left(b - \frac{1}{b}\right)\ln a\,. \end{aligned}$$

b)



Les coordonnées elliptiques sont analogues aux coordonnées polaires. Le domaine D est décrit lorsque le couple (u, v) décrit $\Delta = [\,0,\,1\,] \times [\,-\pi,\,\pi\,]$.

Calculons le jacobien du changement de variables. On a

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos v & -au\sin v \\ b\sin v & bu\cos v \end{vmatrix} = abu\,.$$

Par ailleurs

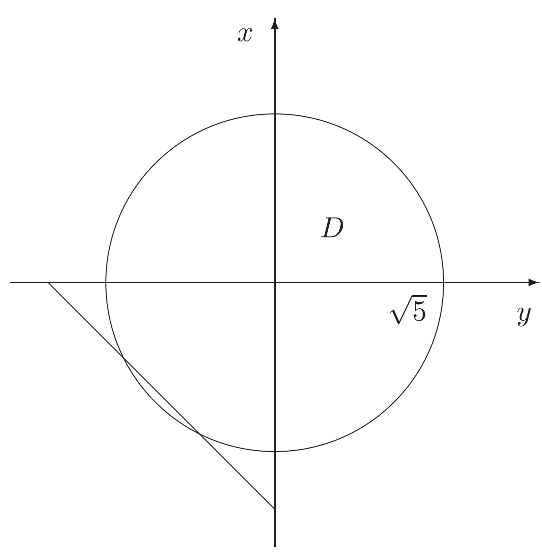
$$f(au\cos v, bu\sin v) = u^2(a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v)\,.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D f(x,y)\,dxdy \\
&= \iint_\Delta abu^3(a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v)\,dudv \\
&= ab\left(\int_0^1 u^3\,du\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi}(a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v)\,dv\right) \\
&= \frac{ab}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\left(a^2\frac{1+\cos 2v}{2} + b^2\frac{1-\cos 2v}{2}\right)\,dv \\
&= \frac{ab}{8}\left[(a^2+b^2)v + (a^2-b^2)\frac{\sin 2v}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{ab}{4}(a^2+b^2)\pi\,.
\end{aligned}$$

EN 26

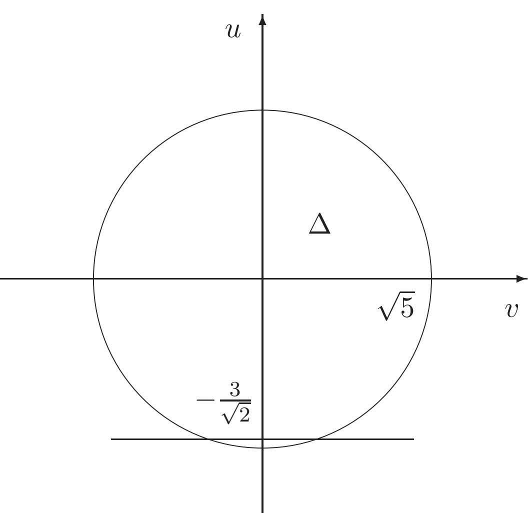
c)



Le changement de variables proposé est une rotation de centre O et d'angle $\pi/4$ qui transforme la droite d'équation $y = -x - 3$ en une droite horizontale ayant pour équation $v = -3/\sqrt{2}$. Le cercle se transforme en lui même, et le jacobien vaut 1 (isométrie). Par ailleurs

$$f(x, y) = \sqrt{2}v\,.$$

L'équation de la partie droite du cercle est $u = \sqrt{5 - v^2}$, et celle de la partie gauche est $u = -\sqrt{5 - v^2}$.



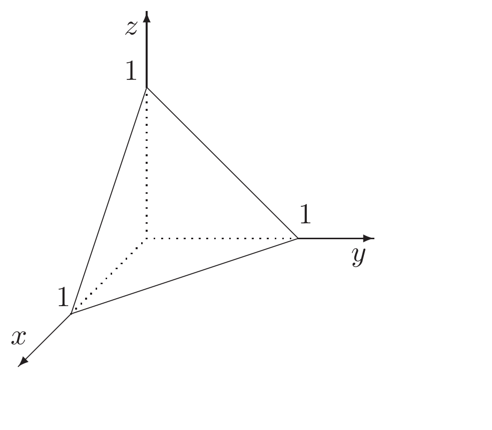
Pour v fixé entre $-3/\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$, on calcule

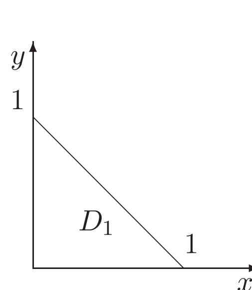
$$I_u(v) = \int_{-\sqrt{5-v^2}}^{\sqrt{5-v^2}} \sqrt{2}v\,du = 2\sqrt{2}v\sqrt{5 - v^2}\,,$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3/\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} I_u(v)\,dv \\ &= 2\sqrt{2}\int_{-3/\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} v\sqrt{5-v^2}\,dv \\ &= \sqrt{2}\left[-\frac{2}{3}(5-v^2)^{3/2}\right]_{-3/\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(5-\frac{9}{2}\right)^{3/2} = \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

4) a)





La projection du domaine D sur le plan xOy est le domaine D_1 limité par les axes et la droite d'équation $x+y=1$.

Lorsque (x,y) appartient à D_1, on a

$$\begin{aligned} I_z(x,y) &= \int_0^{1-x-y} (x+y+z)^2\,dz \\ &= \left[\frac{(x+y+z)^3}{3}\right]_0^{1-x-y} \\ &= \frac{1}{3}\left(1-(x+y)^3\right)\,. \end{aligned}$$

On calcule alors l'intégrale double

$$I = \iint\limits_{D_1} \frac{1}{3}\left(1-(x+y)^3\right)\,dxdy\,.$$

EN 28

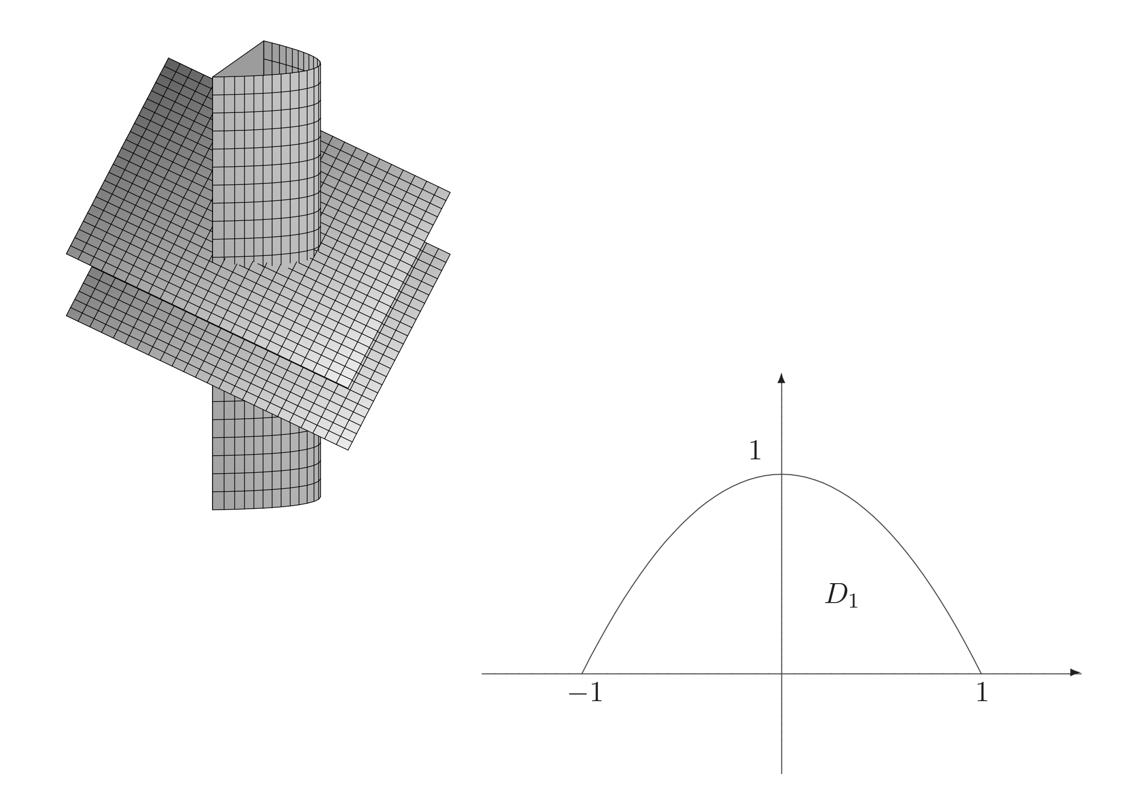
Lorsque x est compris entre 0 et 1, on a

$$\begin{aligned}
I_{zy}(x) &= \int_0^{1-x} I_z(x,y)\,dy \\
&= \int_0^{1-x} \frac{1}{3}\left(1-(x+y)^3\right)\,dy \\
&= \frac{1}{3}\left[y-\frac{(x+y)^4}{4}\right]_0^{1-x} \\
&= \frac{1}{3}\left(1-x-\frac{1}{4}(1-x^4)\right) \\
&= \frac{1}{4}-\frac{x}{3}+\frac{1}{12}x^4\,.
\end{aligned}$$

Alors

$$I = \int_0^1 I_{zy}(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}-\frac{x}{3}+\frac{1}{12}x^4\right)\,dx = \left[\frac{x}{4}-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{60}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{10}\,.$$

b)



Le domaine D est limité par les deux plans d'équations respectives $x+y+z=1$ et $x+y+z=-1$. Sa projection sur les plan xOy est le domaine D_1 limité par l'axe Ox et la parabole d'équation $y=1-x^2$.

Si (x,y) est un point de D_1, on calcule alors

$$I_z(x,y) = \int_{-1-x-y}^{1-x-y} x^2y\,dz = 2x^2y\ .$$

Puis on calcule l'intégrale double

$$I = \iint_{D_1} I_z(x,y)\,dxdy\,.$$

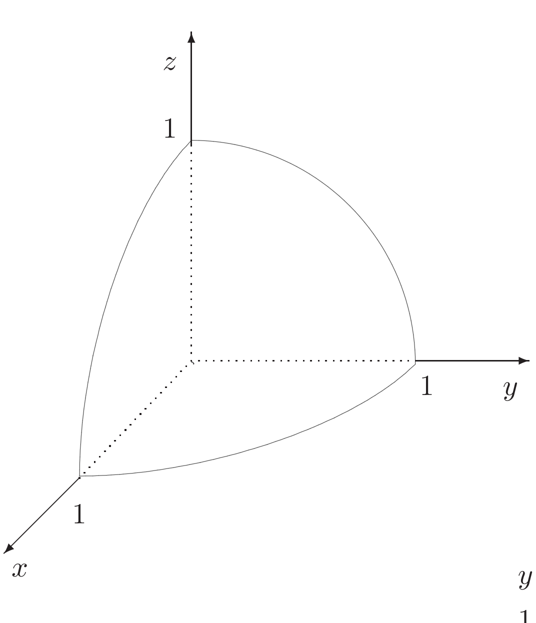
Donc

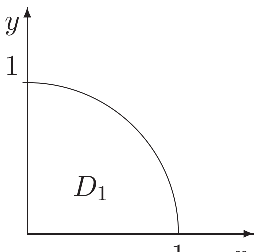
$$I_{zy}(x) = \int_0^{1-x^2} 2x^2y\,dy = \Big[x^2y^2\Big]_0^{1-x^2} = x^2(1-x^2)^2\,,$$

et finalement

$$I = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^2\,dx = \int_{-1}^{1}(x^2-2x^4+x^6)\,dx = 2\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right) = \frac{16}{105}\,.$$

c)





La projection sur les plan xOy du domaine D est le domaine D_1 situé dans le quart de plan $x \geq 0$, $y \geq 0$, limité par les axes, et le cercle d' équation $x^2 + y^2 = 1$.

Si (x, y) est un point de D_1, on calcule alors

$$I_z(x,y) = \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz = \frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)\,.$$

On calcule ensuite l'intégrale double

$$I = \iint_{D_1} I_z(x,y)\,dxdy\,.$$

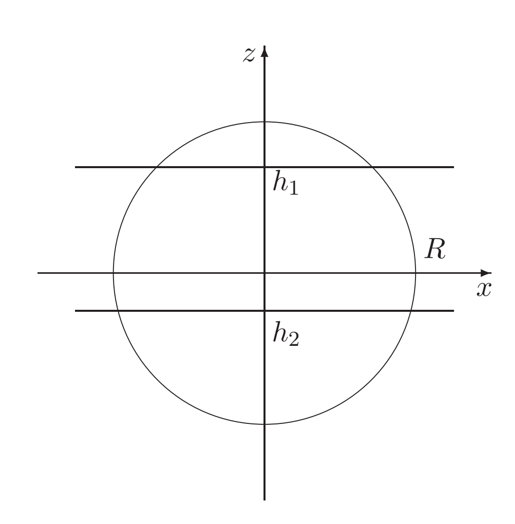
Donc

$$\begin{aligned} I_{zy}(x) &= \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)\,dy \\ &= \frac{x}{2}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ((1-x^2)y-y^3)\,dy \\ &= \frac{x}{2}\left[(1-x^2)\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{x(1-x^2)^2}{8}\,. \end{aligned}$$

Finalement

$$I = \int_0^1 \frac{x(1-x^2)^2}{8}\,dx = \left[-\frac{(1-x^2)^3}{48}\right]_0^1 = \frac{1}{48}\,.$$

5) a)



On utilise les coordonnées cylindriques. La sphère d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ a pour équation cylindrique $r^2 + z^2 = R^2$. On intègre donc sur le domaine

$$\Delta = \{(r, t, z) \,|\, h_2 \leq z \leq h_1 \,,\; -\pi \leq t \leq \pi \,,\; 0 \leq r \leq \sqrt{R^2 - z^2}\} \,,$$

et

$$\mathscr{V} = \iiint\limits_{\Delta} r \, drdtdz \,.$$

La projection de Δ sur le plan tOz est le rectangle $\Delta_1 = [-\pi,\, \pi] \times [h_1,\, h_2]$. Lorsque (t, z) appartient à Δ_1, on a

$$I_r(t, z) = \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} r \, dr = \frac{1}{2}(R^2 - z^2) \,.$$

Alors

$$\mathscr{V} = \iint\limits_{\Delta_1} I_r(t, z) \, dtdz = \left(\int_{h_2}^{h_1} \frac{1}{2}(R^2 - z^2) \, dz \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} dt \right) = \pi \left[R^2(h_1 - h_2) - \frac{1}{3}(h_1^3 - h_2^3) \right] \,.$$

Remarque : si $h_1 = R$ et $h_2 = -R$, on retrouve le volume de la sphère

$$\mathscr{V} = \frac{4}{3}\pi R^3 \,.$$

b)

On utilise les coordonnées sphériques. La sphère d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ a pour équation sphérique $\rho = R$. Le demi-cône supérieur est caractérisé par $\pi/2 - \alpha \leq \varphi \leq \pi/2$. On intègre donc sur le domaine

$$\Delta = [0,\, R] \times [-\pi,\, \pi] \times [\pi/2 - \alpha,\, \pi/2] \,.$$

et

$$\mathscr{V} = \iiint\limits_{\Delta} \rho^2 \cos\varphi \, d\rho dt d\varphi \,.$$

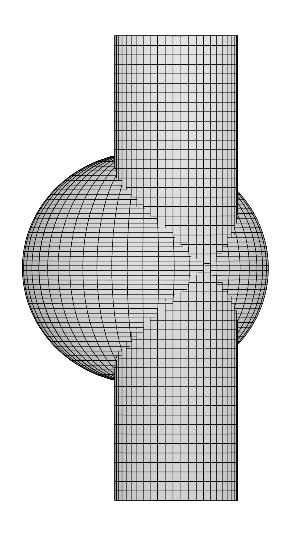
Comme les variables sont séparées on a immédiatement

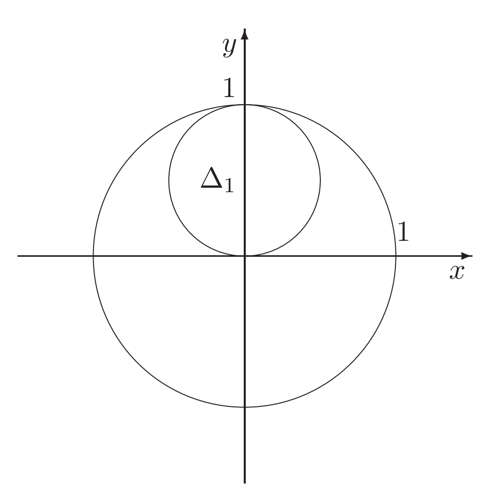
$$\mathscr{V} = \left(\int_0^R \rho^2 \, d\rho \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} dt \right) \left(\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi \right) = \frac{2\pi}{3} R^3 (1 - \cos\alpha) \,.$$

Remarque : si $\alpha = \pi$, on retrouve le volume de la sphère.

c) On utilise les coordonnées cylindriques. La sphère d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a pour équation cylindrique $r^2 + z^2 = 1$ et le cylindre d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - y = 0$, a pour équation cylindrique $r = \sin t$. On intègre sur le domaine

$$\Delta = \left\{(r,t,z) \mid -\sqrt{1-r^2} \leq z \leq \sqrt{1-r^2}\,,\, 0 \leq r \leq \sin t\,,\, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right\}\,.$$





On a donc

$$\mathscr{V} = \iiint\limits_{\Delta} r\,drdtdz\,.$$

La projection de ce domaine sur le plan rOt est le domaine

$$\Delta_1 = \left\{(r,t) \,|\, 0 \leq r \leq \sin t\,,\, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right\}\,.$$

Lorsque (r,t) appartient à Δ_1, on calcule

$$I_z(r,t) = \int\limits_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\,dz = 2r\sqrt{1-r^2}\,,$$

Alors

$$\mathscr{V} = \iint\limits_{\Delta_1} I_z(r,t)\,dr dt\,.$$

Si t est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, on calcule donc,

$$I_{rz}(t) = \int\limits_0^{\sin t} 2r\sqrt{1-r^2}\,dr = \left[-\frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2}\right]_0^{\sin t} = \frac{2}{3}(1-\cos^3 t)\,.$$

Donc

$$\mathscr{V} = \frac{2}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\cos^3 t)\,dt\,.$$

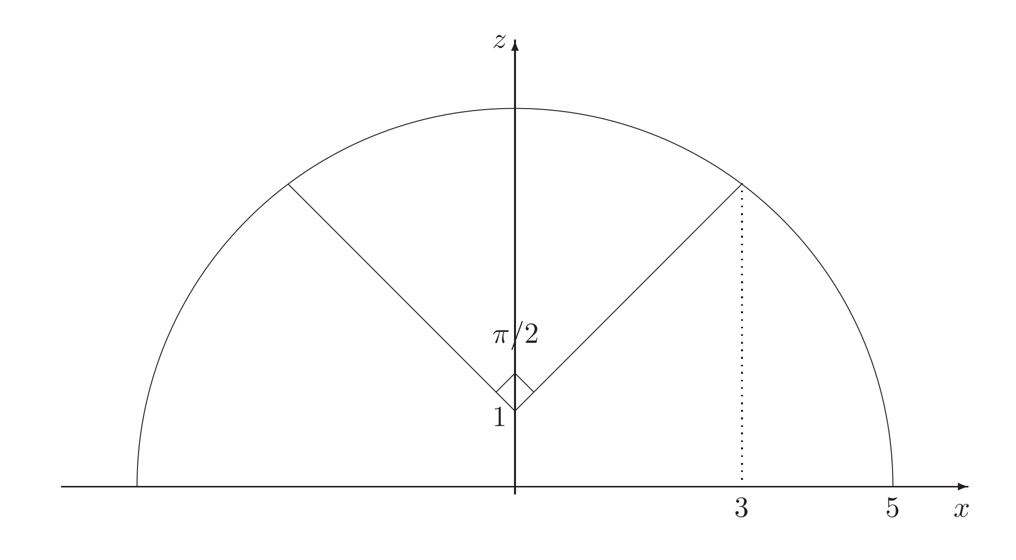
En linéarisant

$$\cos^3 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3it}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-3it}) = \frac{1}{4}(\cos 3t + 3\cos t)\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathscr{V} &= \frac{2}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-\frac{\cos 3t + 3\cos t}{4}\right)dt \\
&= \frac{2}{3}\left[t - \frac{1}{4}\left(\frac{\sin 3t}{3} + 3\sin t\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}\,.
\end{aligned}$$





EN 34

On utilise les coordonnées cylindriques. Lorsque t est fixé, la génératrice du cône a pour équation cylindrique $z = r + 1$. La sphère a pour équation $r^2 + z^2 = 25$. Pour l'intersection on a donc,

$$r^2 + (r+1)^2 = 25\,,$$

soit

$$2r^2 + 2r - 24 = 0\,.$$

On trouve $r = 3$. On intègre sur le domaine

$$\Delta = \{(r,t,z)\,|\,r+1 \leq z \leq \sqrt{25-z^2}\,,\ 0 \leq r \leq 3\,,\ -\pi \leq t \leq \pi\}\,.$$

et

$$\mathscr{V} = \iiint\limits_{\Delta} r\,drdtdz\,.$$

La projection de ce domaine sur le plan rOt est le rectangle

$$\Delta_1 = [\,0,\,3\,] \times [\,-\pi,\,\pi\,]\,.$$

Lorsque (r,t) est dans Δ_1, on calcule

$$I_z(r,t) = \int\limits_{r+1}^{\sqrt{25-r^2}} r\,dz = r(\sqrt{25-r^2} - (r+1))\,.$$

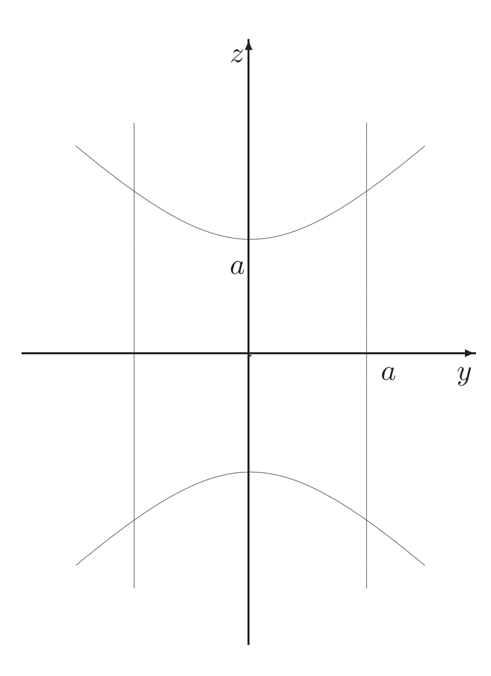
Alors

$$\mathscr{V} = \iint\limits_{\Delta_1} I_z(r,t)\,drdt\,.$$

Mais Δ_1 est un rectangle, et les variables sont séparées, donc

$$\begin{aligned}
\mathscr{V} &= \left(\int\limits_0^3 r(\sqrt{25-r^2} - (r+1))\,dr\right)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} dt\right)\\
&= 2\pi\left[-\frac{1}{3}(25-r^2)^{3/2} - \frac{r^3}{3} - \frac{r^2}{2}\right]_0^3\\
&= \frac{41\pi}{3}\,.
\end{aligned}$$

e)



On utilise les coordonnées cylindriques. L'hyperboloïde a pour équation $z^2 - r^2 = a^2$ et le cylindre $r = a$. On intègre sur le domaine

$$\Delta = \left\{(r, t, z) \mid -\sqrt{a^2 + r^2} \le z \le \sqrt{a^2 + r^2}\,,\ 0 \le r \le a\,,\ -\pi \le t \le \pi\right\}\ .$$

La projection de ce domaine sur le plan rOt est le rectangle

$$\Delta_1 = [\,0,\ a\,] \times [\,-\pi,\ \pi\,]\ .$$

Lorsque (r, t) est dans Δ_1, on calcule

$$I_z(r, t) = \int_{-\sqrt{a^2+r^2}}^{\sqrt{a^2+r^2}} r\,dz = 2r\sqrt{a^2 + r^2}\,.$$

Alors

$$\mathscr{V} = \iint_{\Delta_1} I_z(r, t)\,drdt\,.$$

Mais Δ_1 est un rectangle, et les variables sont séparées, donc

$$\begin{aligned}
\mathscr{V} &= \left(\int_0^a 2r\sqrt{a^2 + r^2}\,dr\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} dt\right) \\
&= 2\pi\left[\frac{2}{3}(a^2 + r^2)^{3/2}\right]_0^a \\
&= \frac{4\pi}{3}a^3(2\sqrt{2} - 1)\,.
\end{aligned}$$

f) Le changement de variables utilisé est analogue aux coordonnées sphériques. Le jacobien vaut

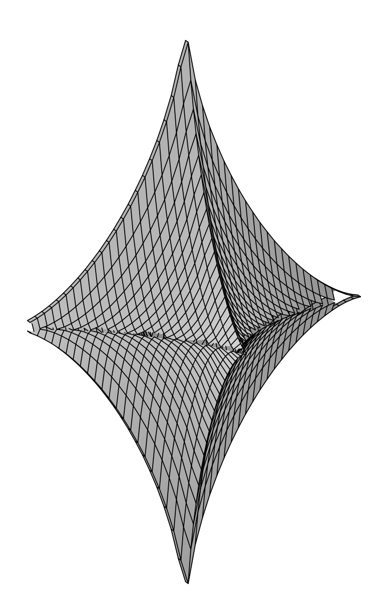
$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,t,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\cos^3\varphi\cos^3 t & -3a\rho\cos^3\varphi\cos^2 t\sin t & -3a\rho\cos^2\varphi\cos^3 t\sin\varphi \\ b\cos^3\varphi\sin^3 t & 3b\rho\cos^3\varphi\sin^2 t\cos t & -3b\rho\cos^2\varphi\sin^3 t\sin\varphi \\ c\sin^3\varphi & 0 & 3c\rho\sin^2\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}.$$

En mettant en facteur $a\cos^2\varphi\cos^2 t$ dans la première ligne, $b\cos^2\varphi\sin^2 t$ dans la deuxième et $c\sin^2\varphi$ dans la troisième, on obtient

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,t,\varphi)} = abc\cos^4\varphi\sin^2\varphi\cos^2 t\sin^2 t \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos t & -3\rho\cos\varphi\sin t & -3\rho\cos t\sin\varphi \\ \cos\varphi\sin t & 3\rho\cos\varphi\cos t & -3\rho\sin t\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & 3\rho\cos\varphi \end{vmatrix}.$$

En mettant alors 3ρ en facteur dans les deuxième et troisième colonne, on trouve

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,t,\varphi)} = 9\rho^2 abc\cos^4\varphi\sin^2\varphi\cos^2 t\sin^2 t \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos t & -\cos\varphi\sin t & -\cos t\sin\varphi \\ \cos\varphi\sin t & \cos\varphi\cos t & -\sin t\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{vmatrix}.$$



Mais le déterminant qui reste n'est autre que celui qui apparaît dans le calcul du jacobien des coordonnées sphériques et vaut $\cos\varphi$. Donc

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,t,\varphi)} = 9abc\rho^2\cos^5\varphi\sin^2\varphi\cos^2 t\sin^2 t\,.$$

On en déduit alors, puisque les variables sont séparées, que

$$\mathscr{V} = 9abc\left(\int_0^1 \rho^2\,d\rho\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,dt\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^5\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\right).$$

On obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \sin^2 t \, dt = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2t \, dt = \frac{1}{8} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 4t) \, dt = \frac{\pi}{4} \,,$$

et, en posant $u = \cos\varphi$,

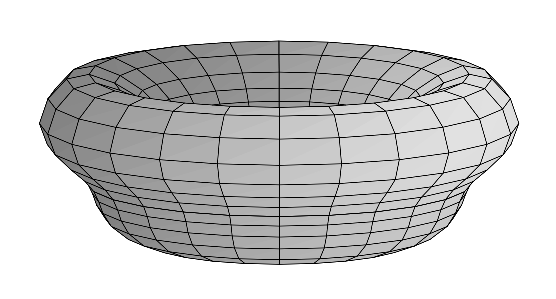
$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi (1 - \sin^2 \varphi)^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi \\ &= \int_{-1}^{1} (1 - u^2)^2 u^2 \, du \\ &= \int_{-1}^{1} (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du = \frac{16}{105} \,. \end{aligned}$$

Finalement

$$\mathscr{V} = 9abc \, \frac{1}{3} \, \frac{\pi}{4} \, \frac{16}{105} = 4\pi \frac{abc}{35} \,.$$

6)

z K x



En calculant le volume en coordonnées cylindriques, on obtient

$$\mathscr{V} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} dt \right) \left(\iint_{K_t} r \, dr dz \right) = 2\pi \iint_{K_t} r \, dr dz \,,$$

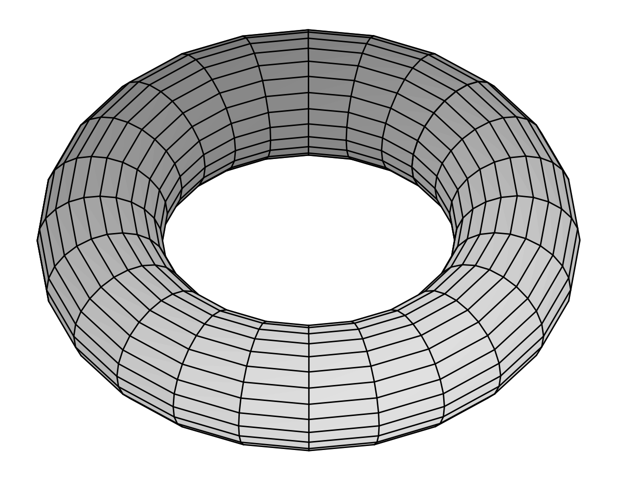
où K_t est l'intersection de D avec le plan vertical rOz, faisant un angle t avec xOz. On a donc, en notant $\mathscr{A}(K_t)$ l'aire de K_t et $r_{G(K_t)}$ l'abscisse, dans le plan rOz du centre de gravité $G(K_t)$ de ce domaine,

$$\iint_{K_t} r \, dr dz = \mathscr{A}(K_t) r_{G(K_t)} \,.$$

Mais K_t et K sont isométriques, donc $\mathscr{A}(K_t) = \mathscr{A}$ et $r_{G(K_t)} = x_G$. Alors

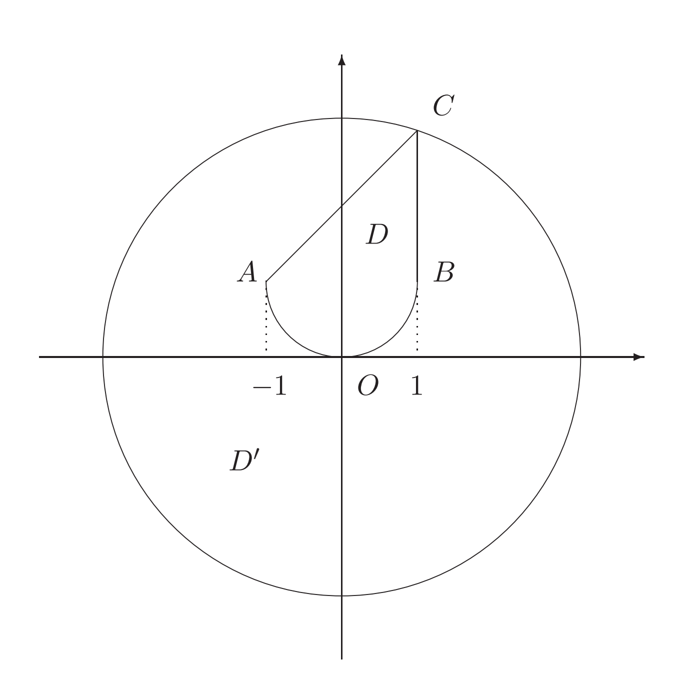
$$\iint_{K_t} r\,drdz = \mathscr{A}\,x_G\,.$$

On obtient donc le résultat voulu.



Si K est le cercle, on a $\mathscr{A} = \pi R^2$ et $x_G = a$, donc $\mathscr{V} = 2a\pi^2 R^2$.

7)



La projection de D sur Ox est l'intervalle $[\,-1,\,1\,]$. La droite AC a pour équation

$$y = x + 2\,.$$

Le cercle de diamètre AB a pour centre le point de coordonnées $(0,1)$ et pour rayon 1. Il a donc pour équation

$$x^2 + (y-1)^2 = 1\,.$$

On en déduit

$$(y-1)^2 = 1 - x^2\,,$$

et pour la partie inférieure du cercle

$$y = 1 - \sqrt{1-x^2}\,.$$

On calcule, pour tout x de $[-1,\,1]$ l'intégrale

$$I_y(x) = \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x+2} x^2(y-1)\,dy\,.$$

On a donc

$$\begin{aligned} I_y(x) &= \left[x^2\frac{(y-1)^2}{2}\right]_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x+2} \\ &= \frac{1}{2}\left[x^2(x+1)^2 - x^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[x^2(x+1)^2 - x^2(1-x^2)\right] \\ &= x^4 + x^3\,. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= \iint_D x(y-1)^2\,dxdy = \int_{-1}^{1}(x^4+x^3)\,dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{2}{5}\,. \end{aligned}$$

b) La fonction $g\,:(x,y)\mapsto x^2y$ est telle que, quel que soit (x,y) dans $\mathbb{R}^2$,

$$g(x,-y) = -g(x,y)\,.$$

Par ailleurs, tout disque D'' centré en O est symétrique par rapport à l'axe Ox. Il résulte de ces deux propriétés que

$$\iint_{D''} g(x,y)\,dxdy = 0\,.$$

Donc

$$J = \iint_{D''} f(x,y)\,dxdy = -\iint_{D''} x^2dx\,.$$

Calculons cette dernière intégrale en coordonnées polaires.

Désignons par Δ le rectangle $[\,0,\,\sqrt{10}\,] \times [\,-\pi,\,+\pi\,]$. Alors, comme les variables sont séparées, on a,

$$J = -\iint\limits_{\Delta} r^2 \cos^2 t \, r dr dt = -\left(\int\limits_0^{\sqrt{10}} r^3 \, dr\right)\left(\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 t \, dt\right),$$

ou encore

$$\begin{aligned} J &= -\left(\int\limits_0^{\sqrt{10}} r^3 \, dr\right)\left(\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt\right) \\ &= -\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{10}} \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_{-\pi}^{+\pi} \\ &= -25\pi\,. \end{aligned}$$

Comme le disque de centre O et de rayon $\sqrt{10}$ contient D, on aura

$$\iint\limits_{D'} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{D''} f(x,y)\, dxdy - \iint\limits_{D} f(x,y)\, dxdy = -25\pi - \frac{2}{5}\,.$$